Istituzioni di Matematica
CdL Scienze Biologiche

Derivata

Def Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto e sia $x_0 \in A$

Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice $f(x)$ derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{finito !}$$

In tal caso, definiamo la derivata di $f(x)$ in x_0 come

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

Notazione $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ si chiama rapporto incrementale di $f(x)$ in x_0

Vediamo da dove nasce questa definizione

Ricordo Nel piano $\mathbb{R}^2$ siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ due punti distinti $(P_1 \neq P_2)$

L'equazione dell'unica retta passante per i 2 punti è data

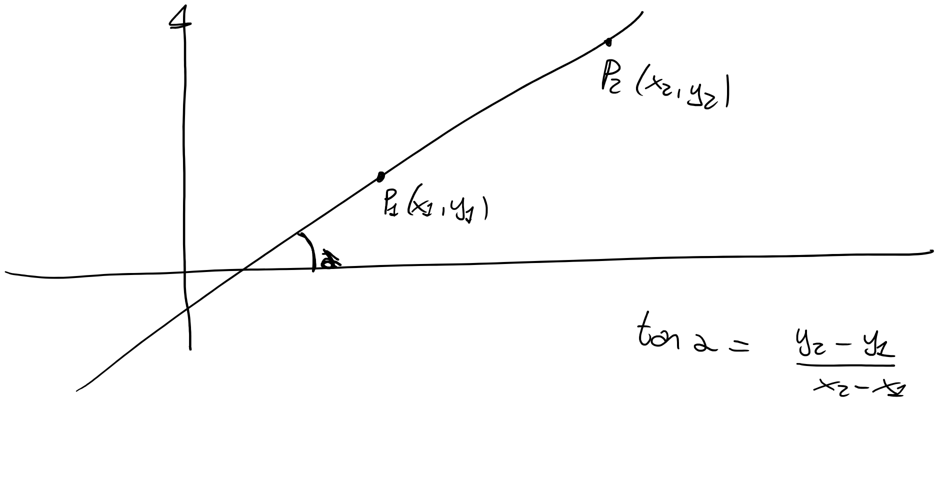
$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_2}}$$

Ossia

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

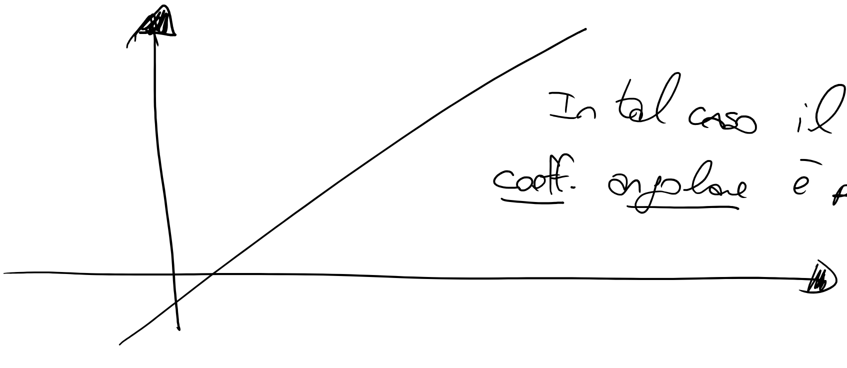
$$\iff \boxed{y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x + \left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\, x_1 \right)}$$

Osserviamo che il numero $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ che accompagna la x rappresenta la tangente dell'angolo che la retta forma risp. all'asse $\vec{x}$ (viene detto <u>coefficiente</u> <u>angolare</u> della retta). Più è grande questo valore in senso positivo, più la retta sale in maniera ripida



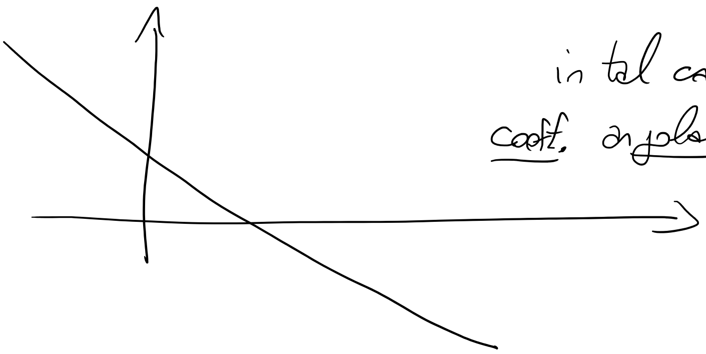
$$\tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

<u>Esempio</u>



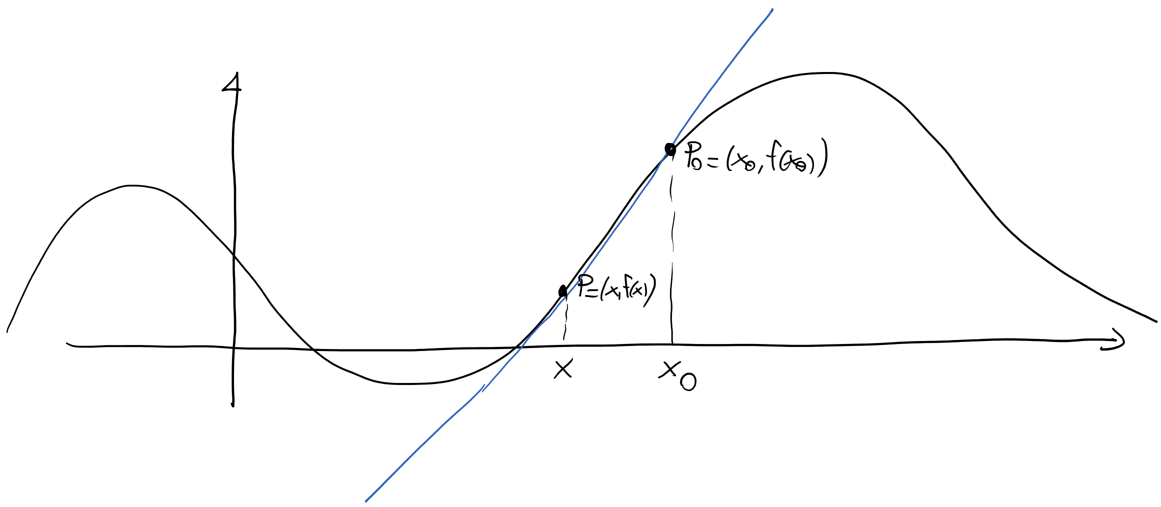
In tal caso il <u>coeff.</u> <u>angolare</u> è <u>positivo</u>

mente



in tal caso il coeff. angolare è negativo

Ritorniamo alla funzione $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$

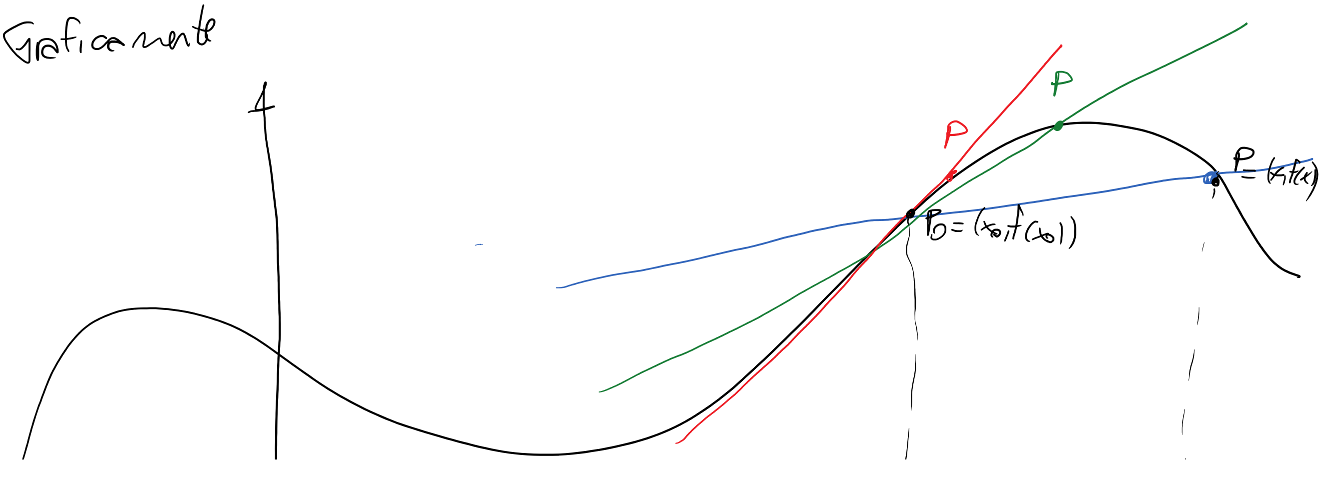


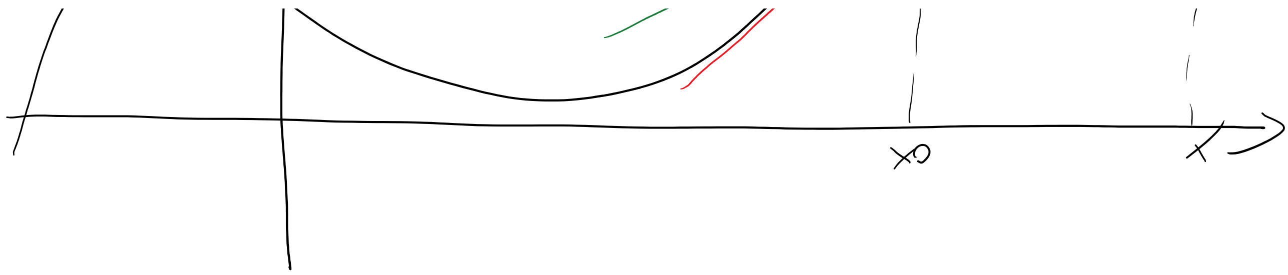
Noto che il coefficiente angolare della retta passante per $P_0 P$ è data

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ossia coincide con il rapporto incrementale dato nella definizione di derivata. Ora vediamo cosa accade quando $x \to x_0$

Graficamente





Notiamo che a mano a mano che il punto P si avvicina al punto P_0, la retta passante per PP_0 coincide con la retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $(x_0, f(x_0))$

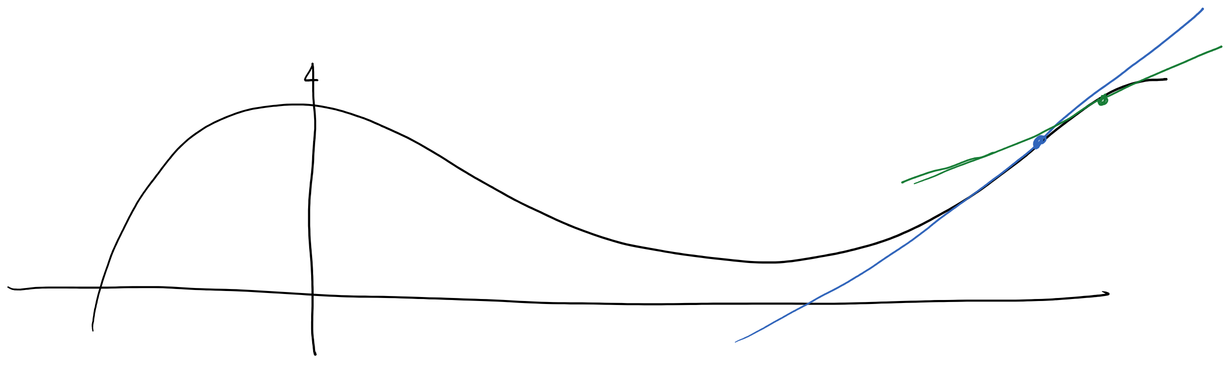
Ossia, la derivata $\underline{f'(x_0)}$ nasce come $\underline{\text{coefficiente angolare}}$ della $\underline{\text{retta}}$ $\underline{\text{tangente}}$ al grafico della funzione in $(x_0, f(x_0))$

In particolare, se conosco $f'(x_0)$ posso facilmente dare l'eq^ne retta tangente al grafico di $f(x)$ in $(x_0, f(x_0))$

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

Osserviamo che conoscere il coeff. angolare della retta tangente al grafico di $f(x)$ ci permette di descrivere l'andamento della funzione

<u>Oss</u>



nel caso in cui $f(x)$ è monotona crescente notiamo che la retta tangente al grafico è crescente

$$\Longrightarrow \quad f'(x) > 0$$

In realtà vale anche il viceversa

Ora cerchiamo di calcolare la derivata di funzioni note

1 $f(x) = c$ funzione costante

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

$$\boxed{f(x) = c \implies f'(x) = 0}$$

Proprietà (linearità della derivata)

Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$

ed f, g derivabili in x_0. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora $\alpha f(x) + \beta g(x)$ è derivabile in x_0, e vale

$$\boxed{(\alpha f(x) + \beta g(x))'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)}$$

Dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{(\alpha f(x) + \beta g(x)) - (\alpha f(x_0) + \beta g(x_0))}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right] =$$

$$= \alpha \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \beta \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

Ricordo: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) =$

$= a^3 + \cancel{a^2 b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2 b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3$

più in generale se $n \in \mathbb{N}$ $n \geq 2$

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + a^2 b^{n-3} + a b^{n-2} + b^{n-1})}$$

Calcoliamo $f'(x)$ se $f(x) = x^n$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{(x - x_0)}(x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{\cancel{x - x_0}} =$$

$$= x_0^{n-1} + x_0^{n-2} \cdot x_0 + \dots + x_0 \cdot x_0^{n-2} + x_0^{n-1} =$$

$$= \underbrace{x_0^{n-1} + x_0^{n-1} + \dots + x_0^{n-1} + x_0^{n-1}}_{n\text{-addendi}} = n x_0^{n-1}$$

$$\boxed{f(x) = x^n \implies f'(x) = n x^{n-1}}$$

2) Sia $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$f'(x) = a_n (x^n)' + a_{n-1} (x^{n-1})' + \dots + a_1 (x)' + 0$$

$$= n\, a_n\, x^{n-1} + (n-1)\, a_{n-1}\, x^{n-2} + \dots + a_1 \cdot 1$$

Esempio

$$f(x) = x^4 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$f'(x) = 4x^{4-1} + 3 \cdot 2\, x^{2-1} + 2 \cdot x^{1-1} + 0 =$$

$$= 4x^3 + 6x + 2$$

Esempio

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + 5x + 100$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x + 5 + 0$$

$$= 6x^2 + 14x + 5$$

3) $f(x) = a^x$ Funzione esponenziale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \frac{\frac{a^x}{a^{x_0}} - 1}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \frac{a^{x - x_0} - 1}{x - x_0}$$

Chiamo $y = x - x_0$

$\lim_{x \to x_0} y = 0$

$$= a^{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{a^y - 1}{y} =$$

$$= a^{x_0} \log a$$

$$\boxed{f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \log a}$$

In particolare

$$\boxed{f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x}$$

4) $f(x) = \log_a x$ funzione logaritmica

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\log_a x - \log_a x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\log_a\left(\frac{x}{x_0}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{\log_a\left(\frac{x}{x_0}\right)}{\frac{x}{x_0} - 1} =$$

$$= \frac{1}{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{\log_a\left(1 + \left[\frac{x}{x_0} - 1\right]\right)}{\frac{x}{x_0} - 1}$$

chiamo $y = \frac{x}{x_0} - 1$

$\lim_{x \to x_0} y = 0$

$$(CV) = \frac{1}{x_0} \lim_{y \to 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{x_0} \cdot \log_a e =$$

$$= \frac{1}{x_0} \frac{1}{\log a}$$

$$\boxed{f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{\log a}}$$

5) $f(x) = \operatorname{sen} x$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x_0}{x - x_0} = \text{(Formula di Prostaferesi)}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-x_0}{2}\right)}{\frac{x-x_0}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) = (*)$$

$$\boxed{\text{chiamo } y = \frac{x-x_0}{2} \qquad \lim_{x \to x_0} y = 0}$$

$$(*) = \underbrace{\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\to 1} \cdot \lim_{x \to x_0} \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

$$= 1 \cdot \cos\left(\frac{x_0+x_0}{2}\right) = \cos x_0$$

$$\boxed{f(x) = \operatorname{sen} x \implies f'(x) = \cos x}$$

Analogamente

$$\boxed{f(x) = \cos x \implies f'(x) = -\operatorname{sen} x}$$

<u>Teorema</u> (derivazione di un prodotto)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$ e siano $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$

entrambe derivabili in x_0

$\Longrightarrow$ $f(x) \cdot g(x)$ è derivabile in x_0, e vale

$$\boxed{(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}$$

<u>Teorema</u> (Derivazione reciproco)

Se $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$ <u>$f(x)$</u> <u>derivabile</u> <u>in x_0</u>

con $f(x) \neq 0$ $\forall x \in A$

Allora $\frac{1}{f(x)}$ è derivabile in x_0, e vale

$$\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{[f(x_0)]^2}}$$

Possiamo allora dedurre

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x) = \text{(formula prodotto)}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \text{(form reciproco)}$$

$$= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(-\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\right)$$

$$= \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \quad \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{}$$

$$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}}$$

6) $f(x) = \tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)' = \frac{(\operatorname{sen} x)'\cos x - \operatorname{sen} x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \operatorname{sen} x\,(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\boxed{f(x) = \tan x \implies f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

Teorema (Derivazione funzioni composte)

$A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$ $\quad f: A \longrightarrow B$

$B \subseteq \mathbb{R}$ aperto, chiamo $y_0 = f(x_0) \in B$

sia $\quad g: B \longrightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo che $f(x)$ è derivabile in x_0

e $g(x)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

$\implies g(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale

$\Longrightarrow$ $g(f(x))$ è derivabile in x_0 e vale

$$\boxed{\left(g(f(\cdot))\right)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)}$$

Teorema (Derivazione funzioni inverse)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ aperto, $x_0 \in A$, $f: A \to \mathbb{R}$ invertibile (iniettiva + suriettiva)

Supponiamo $f(x)$ derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$

Allora f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$

e vale
$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}}$$

Esercizio
$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^3}}{\log(1+x^2)} = \left(\frac{1-\sqrt{1+0}}{\log(1+0)} = \frac{0}{0} \text{ f.i.}\right)$$

Richiamo:
$$\boxed{\lim_{y \to 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha}$$
$$\boxed{\lim_{z \to 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1} = \log_e e$$

$$\lim \frac{1 - \sqrt{1+x^3}}{} = -\lim_{x \to 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}} - 1}{} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+x^3}}{\log(1+x^2)} = -\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}-1}{\log(1+x^2)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}-1}{x^3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{\log(1+x^2)} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{2}}-1}{x^3} \cdot \cancel{x^3} \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}}$$

$$= -\lim_{y\to 0} \underbrace{\frac{(1+y)^{\frac{1}{2}}-1}{y}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \lim_{z\to 0} \underbrace{\frac{z}{\log(1+z)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} x}_{\to 0}$$

chiamo $y = x^3$, $\lim_{x\to 0} y = 0$

chiamo $z = x^2$, $\lim_{x\to 0} z = 0$

$$= 0$$

Esercizio

$$\lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)}{3^{x-2}-1} = \left(\frac{\log 1}{3^0-1} = \frac{0}{0} \text{ f.i.}\right)$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\log(1+(x-2))}{(x-2)} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} \cdot \frac{x-2}{3^{x-2}-1}$$

Chiamo $z = x-2$
$\lim_{x\to 2} z = 0$

$$CV = \lim_{z\to 0} \frac{\log(1+z)}{z} \cdot \frac{z}{3^z-1} = \frac{1}{\log 3}$$

$\frac{\log(1+z)}{z} \to 1$ $\qquad$ $\frac{z}{3^z-1} \to \frac{1}{\log 3}$

Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2+4}\right)^x = (1^\infty \text{ F.I.})$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(x^2+4)+1}{x^2+4}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+4}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x^2+4}\right)^{x^2+4}\right]^{\frac{1}{x^2+4}\cdot x} =$$

Chiamo $y = x^2+4$, $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left[\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{\to e}\right]^{\frac{x}{x^2+4}} = e^0 = 1$$

$\frac{x}{x^2+4} \to 0$

Esercizio

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - [\log(1+x)]^2 - 1}{x^2} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e - [\log(1+x)] - 1}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3}-1}{x^2} - \left[\frac{\log(1+x)}{x}\right]^2 =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{e^{x^3}-1}{x^3}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3}{\cancel{x^2}}}_{\to 0} - \left[\overbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}^{\to 1}\right]^2$$

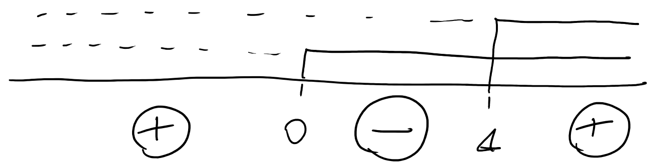
$$= -1$$

Esercizio

$$A = \left\{ \frac{x^2-4x}{x^2+1} \; : \; x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\frac{x^2-4x}{x^2+1} \geq 0 \iff x^2 - 4x \geq 0$$

$$\iff x(x-4) \geq 0$$



Se $y \in \mathbb{R}$ è maggiorante per A

$$\frac{x^2-4x}{x^2+1} \leq y \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

In particolare se $(x > 4) \implies x^2 - 4x$

In particolare se $x>4 \Rightarrow \frac{x^2-4x}{x^2+1}>0$

$\Rightarrow y>0$

Ossia cerco maggioranti $y>0$

$\frac{x^2-4x}{x^2+1} \le y \rightarrow$ impongo $Sol = \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2-4x \le yx^2+y$

(P_x) $\boxed{(1-y)x^2-4x-y \le 0}$

se $1-y>0 \Rightarrow$

$\Delta>0$ $Sol=[x_1,x_2]$ No $\neq \mathbb{R}$

$\Delta=0$ $Sol=\{x_1,x_2\}$ No $\neq \mathbb{R}$

$\Delta<0$ $Sol=\phi$ No $\neq \mathbb{R}$

Se $1-y<0$ $(y>1)$

(P_x) $\boxed{(y-1)x^2+4x+y \ge 0}$

$\Delta>0$ Sol $]-\infty,x_1]\cup[x_2,+\infty[$ No $\neq\mathbb{R}$

$\Delta\le 0$ $Sol=\mathbb{R}$ Ok

$\Rightarrow$ $\Delta = 4^2-4(y-1)\cdot y \le 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta = 4^2 - 4(y-1)\cdot y \leq 0}$$

$$4\left(4-(y-1)y\right) \leq 0$$

$$4 - y^2 + y \leq 0$$

$$y^2 - y - 4 \geq 0$$

$\Delta = 1 + 16 = 17$ $\qquad$ $\underline{\underline{Sol}}$ $\cancel{y \leq \frac{1-\sqrt{17}}{2}}$ $\cup$ $y \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

NO $(y>1)$

Concludo

$$A^* = \left\{ y \in \mathbb{R} \; : \; y \geq \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow \sup A = \min A^* = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$$

$\frac{1+\sqrt{17}}{2} \in A$? $\iff$ $\exists x \in \mathbb{R}$ $\quad \frac{1+\sqrt{17}}{2} = \frac{x^2-4x}{x^2+1}$?

$$\iff (1+\sqrt{17})(x^2+1) = 2(x^2-4x)$$

$$(1+\sqrt{17})x^2 + (1+\sqrt{17}) = 2x^2 - 8x$$

$$(-1+\sqrt{17})x^2 + 8x + (1+\sqrt{17}) = 0$$

$$\Delta = 8^2 - 4(-1+\sqrt{17})(1+\sqrt{17}) = 8^2 - 4(17-1)$$

$$= 8^2 - 4 \cdot 16$$

$$= 8^2 - 4 \cdot 8 \cdot 2$$

$$= 8(8 - 4 \cdot 2) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1+\sqrt{17}}{2} = \max A$$

Per casa $\quad \inf A \quad , \quad \min A \quad ?$